BOOLEOVA ALGEBRA

Definice: Nechť je dána neprázdná množina B, na níž jsou zavedeny binární operace sčítání a násobení a unární operace doplněk prvku z množiny B. Tyto operace budeme označovat obvyklým způsobem, tj. $x+y$, $x \cdot y$ nebo xy a x'. Nechť v množině B existují dva navzájem různé prvky, které označíme 0, 1. Množinu B spolu s těmito operacemi nazýváme **Booleova algebra**, jestliže pro každé prvky $x, y, z \in B$ platí:
(1) $x + 0 = x$
(2) $x + x' = 1$
(3) $x + y = y + x$
(4) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(5) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(6) $x \cdot 1 = x$
(7) $x \cdot x' = 0$
(8) $x \cdot y = y \cdot x$
(9) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(10) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Označení $(B, +, \cdot, \ ')$.

Poznámka: Domluvíme se, že operace násobení bude mít přednost před operací sčítání. V Booleově algebře platí princip duality.

Věta: V Booleově algebře $(B, +, \cdot, \ ')$ pro libovolné prvky $x, y, z \in B$ platí:
(a) $x + x = x$
(b) $x \cdot x = x$
(c) $x + 1 = 1$
(d) $x \cdot 0 = 0$
(e) $(x')' = x$
(f) $1' = 0,\ 0' = 1$
(g) $(x + y)' = x' \cdot y'$
(h) $(x \cdot y)' = x' + y'$
(i) $x + xy = x$
(j) $x(x + y) = x$
(k) $x + x'y = x + y$
(l) $x(x' + y) = xy$
(m) $x + y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$
(n) $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 1$
(o) $x = y \Leftrightarrow xy' + x'y = 0$
(p) $x = y \Leftrightarrow (x + y')(x' + y) = 1$

Věta: V Booleově algebře $(B, +, \cdot, \ ')$ zavedeme binární relaci R takto:

$$\forall\ x, y \in B:\ x\ R\ y \Leftrightarrow xy' = 0.$$

Potom relace R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Poznámka: To znamená, že relace R z předchozí věty je neostré lineární uspořádání v množině B a budeme ji proto označovat symbolem „$\leq$“.

Věta: V Booleově algebře $(B, +, \cdot, \ ')$ s uspořádáním „$\leq$“ pro libovolné prvky $x, y \in B$ platí:
(a) $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$
(b) $x \leq y \Leftrightarrow xy = x$
(c) $0 \leq x \wedge x \leq 1$
(d) $x \leq y \Leftrightarrow y' \leq x'$

Modely Booleovy algebry
1) Množinová algebra $(P(M), \cup, \cap, \ ')$, kde $P(M)$ je potenční množina libovolné neprázdné množiny M, je modelem Booleovy algebry.

2) Mějme klasickou dvouhodnotovou logiku, symboly 0, 1 nechť označují pravdivostní hodnoty nepravda a pravda. Potom algebra pravdivostních hodnot $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg)$ je modelem dvouprvkové Booleovy algebry.

Úlohy

1) Rekreanti A, B, C, D, E se rozhodují, zda podniknou cestu parníkem. Své rozhodnutí podmiňují někteří tím, jak se rozhodnou další z nich. Paní B říká, že pojede, vydá-li se na cestu i její manžel A. Pánové A a D rozhodně pojedou, pojede-li též veselý pán E. Paní B a slečna C se nemají rády, ani za nic nepojedou společně. Slečna C a pan D naopak pojedou jen spolu nebo žádný z nich. Zjistěte, kdo nastoupí na parník, víte-li, že alespoň jeden z pánů D, E si cestu nenechá ujít.

2) Při vyšetřování krádeže bylo zjištěno pět podezřelých A, B, C, D, E. V době činu mohl být na místě C nebo D, ale nejvýše jeden z dvojice A, B a alespoň jeden z dvojice A, C. Podezřelý E tam mohl být jen v přítomnosti D, ale pokud tam E byl, nechyběl ani C. Lze vyloučit spolupráci B s D, zato B a C tvoří nerozlučnou dvojici. Kdo z podezřelých má alibi a jaké jsou možnosti pro složení party?

3) Malíř má sedm kelímků s barvami. Chce namíchat odstín barvy, který se nevyrábí. Přál by si, aby nově namíchaná barva obsahovala:
- alespoň jednu z barev D, E,
- nejvýše jednu z barev A, B,
- barvu C právě tehdy, když bude obsahovat barvu B,
- použije-li barvu C, musí použít barvu F,
- použije-li barvu D, nesmí použít barvu A,
- nepoužije-li barvu B, musí použít barvu G,
- barvu F nesmí smíchat s barvou G.

Kolik nových barev a v jakém složení namíchá?

4) Fotograf má pořídit reklamní dnímky skupiny objektů, které nelze přemístit. Díval se hledáčkem fotoaparátu a o výsledcích referoval objednavateli:
- zachytím-li objekt A, nezachytím objekt B,
- když nebude na snímku objekt D, bude na něm objekt C i E,
- na každém snímku s objektem C bude objekt A,
- z objektů C, D se vždy podaří zachytit alespoň jeden,
- zachytím-li objekt D, pak bude na snímku i objekt B.

Na kolika snímcích může být objekt A alespoň s jedním dalším objektem? Co lze odpovědět na stejnou otázku s objektem B?

5) Parta kamarádů si domlouvá výlet do Krkonoš. Den, který navrhuje vedoucí A se nehodí všem. Ze sourozenců C, E i B, F bude moci jet na výlet vždy jen jeden. Dále bude chybět alespoň jeden ze dvojice A, D a G, H. Naproti tomu je jisté, že pojede A nebo H, dále pak E nebo G a alespoň jeden z dvojice D, F. Ze dvojice nadšených turistů B, C bude sházet nejvýše jeden. Kdo se vypraví na výlet s vedoucím A?

6) Rozhodněte, kdo ze sedmi kamarádů A, B, C, D, E, F, G půjde do kina, jestliže mají být splněny následující podmínky: Ze dvojice A, B půjde alespoň jeden, právě když půjdou oba z dvojice C, D. Buď alespoň jeden ze dvojice E, F nepřijde nebo nepřijde ani jeden z dvojice A, G. Přijde-li ze dvojice B, C nejvýše jeden, pak přijde alespoň jeden z dvojice E, D. E nepřijde bez F. Ze dvojice F, G přijdou buď oba nebo ani jeden.

7) Rozhodněte, zda z předpokladu, že platí $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg D$ a $(A \vee C) \Rightarrow \neg B$ a $(\neg A \vee \neg D) \Rightarrow \neg(B \wedge C)$ a $A \vee B \vee C \vee D$, plyne závěr úsudku:

a) $A \vee C$
b) $\neg B \Rightarrow C$
c) $C \Rightarrow \neg D$
d) $A \leftrightarrow D$
e) $\neg B \Rightarrow (A \vee C)$

8) Rozhodněte, zda z předpokladu, že platí $A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg D)$ a $B \Rightarrow (\neg C \wedge \neg E)$ a $C \Rightarrow \neg E$ a $(A \wedge C) \Rightarrow \neg D$ a $\neg A \Rightarrow B$, plyne závěr úsudku:

a) $B \Rightarrow D$
b) $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (E \vee C)$

ZEBRY

1) V ulici stojí vedle sebe pět domků, každý jiné barvy. Zjistěte, v jakém pořadí domky stojí, který muž a která žena v nich bydlí, jaké zvíře chovají a jaké auto vlastní, víte-li:
1. Adam bydlí v červeném domku.
2. Leoš má psa.
3. Milan bydlí v prvním domku zleva.
4. Jiřina bydlí ve žlutém domku.
5. Iveta má sousedy, kteří chovají rybičky.
6. Milan bydlí vedle modrého domku.
7. Berta má kočku.
8. Eva jezdí v autě Fiat.
9. Tomáš vlastní auto Seat.
10. Karel se oženil s Lucií.
11. Jiřina má sousedy, kteří chovají koně.
12. V zeleném domku mají Mazdu.
13. Zelený domek je hned nalevo od bílého.
14. Škodu vlastní v prostředním domku.
15. Někdo vlastní auto Renault.
16. V jednom domku chovají želvu.

2) V jednom přístavu vedle sebe stojí pět lodí.
1. Řecká loď vyplouvá v 6 hodin a veze kávu.
2. Prostřední loď má černý komín.
3. Anglická loď vyplouvá v 9 hodin.
4. Francouzská loď je nalevo od lodi vezoucí kávu a má modrý komín.
5. Napravo od lodi vezoucí kakao je loď plující do Marseille.
6. Brazilská loď pluje do Manily.
7. Vedle lodi vezoucí rýži je loď se zeleným komínem.
8. Loď do Janova vyplouvá v 5 hodin.
9. Španělská loď vyplouvá v 7 hodin a je napravo od lodi plující do Marseille.
10. Do Hamburku pluje loď s červeným komínem.
11. Vedle lodi vyplouvající v 7 hodin je loď s bílým komínem.
12. Loď kotvící na kraji veze obilí.
13. Loď s černým komínem vyplouvá v 8 hodin.
14. Loď vezoucí obilí kotví vedle lodi vezoucí rýži.
15. Do Hamburku vyplouvá loď v 6 hodin.
Která loď pluje do Port Saidu a která veze čaj?

3) Na tenisovém dvorci sedí vedle sebe pět chlapců se svými dívkami a sledují hru. Každá dívka drží v ruce kytičku květin, kterou jí koupil její chlapec.
1. Fialky koupil mechanik.
2. Prodavač sedí vedle chlapce, který má rád fotbal.
3. Optik má rád odbíjenou.
4. Vláďa si olíbil házenou.
5. Chlapec v prostředním páru je optik.
6. Zuzana tvrdí, že její Jirka má nejraději tenis.
7. Miloš koupil astry.
8. Růže přinesl milovník hokeje.
9. Božena sedí se svým chlapcem na pravém kraji.
10. Vedle Boženy sedí Ivana.

11. Tenista daroval kytičku fialek.
12. Pavel sedí napravo od chlapce, který koupil narcisy.
13. Karel studuje na vysoké škole.
14. Řidič chodí s Boženou.
15. Pavel má nejraději fotbal.
16. Napravo od Karla sedí chlapec se Zuzanou.
17. Dívka s kyticí narcisů je napravo od Marie.

Kdo koupil Jiřiny? Kdo chodí s Alenou?

4) Na houbách se sešlo pět houbařů. Byli různě staří a různě obutí. Jejich nález byl různý a houby dávali do různých nádob. K dispozici máme tyto údaje:

1. Houbař o 6 let mladší než houbař v botaskách byl nejmladší a nasbíral samé muchomůrky.
2. Houbař v botaskách si bral tašku zbytečně.
3. Kadeřábek, který je o 12 let starší než nejmladší, si vzal sandály.
4. Plný košík pravých hřibů našel houbař, který byl starší než Starý.
5. Houbař, který je právě o tolik let mladší než Kadeřábek, jako je mladší nejmladší houbař od houbaře v botaskách, se jmenuje Dolejší.
6. Pohorky neměl houbař jménem Starý.
7. Novák šel na houby v polobotkách a není o 33 let starší než nejmladší.
8. Jeden houbař, který je o 20 let starší než houbař v botaskách, si nesl na houby pytel.
9. Dolejší má tolikrát tolik let, o kolik je nejmladší mladší než houbař v botaskách.
10. Houbař Starý není nejmladší.
11. Houbař, který je o 21 let mladší než nejstarší, šel původně na ostružiny - má tedy kbelík.
12. Němec nenašel žampiony.
13. Houbař, který neměl pohorky ani sandály, sbíral do igelitového sáčku.
14. Směs hub našel houbař v gumákách.

Určete jméno každého houbaře, jeho věk, obuv a do čeho dával houby, pokud nějaké našel.

ÚLOHY O POCTIVCÍCH A LHÁŘÍCH

Ostrov poctivců a padouchů

Existuje velké množství hádanek o ostrově, na němž jedni jeho obyvatelé, nazývaní poctivci, vždy mluví pravdu, a ostatní, nazývaní padouchy, vždy lžou. Předpokládá se, že každý obyvatel ostrova je buď poctivec, nebo padouch.

1) Klábosí tři obyvatelé A, B a C. Jde kolem cizinec a zeptá se A: „Jste padouch nebo poctivec?“ A odpoví, ale nezřetelně, takže cizinec nerozezná, co řekl. Cizinec se proto zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je padouch.“ V tom okamžiku C řekne: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

2) Cizinec se zeptá A: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně. Cizinec se tedy zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

3) V téhle hádance vystupují jenom dva, A a B, každý z nich je poctivec nebo padouch. A prohlásí: „Aspoň jeden z nás je padouch.“ Co jsou A a B?

4) Zase máme tři, A, B a C, a každý je buď poctivec, nebo padouch. A řekne: „Všichni jsme padouši.“ B řekne: „Právě jeden z nás je poctivec.“ Co jsou A, B a C?

5) A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

Poctivci, padouši a normální lidi

Zajímavé jsou i hádanky, v nichž se vyskytují tři typy lidí - poctivci, kteří vždy mluví pravdu, padouši, kteří vždy lžou, a normální lidi, kteří někdy mluví pravdu a někdy lžou.

1) Máme tři lidi, A, B a C, jeden z nich je poctivec, druhý padouch a třetí normální (ale ne nutně v tomto pořadí). A řekne: „Já jsem normální." B řekne: „To je pravda." C řekne: „Já nejsem normální." Co jsou A, B a C?

2) Máme dva lidi, A a B, z nichž každý je poctivec, padouch nebo normální člověk. A řekne: „B je poctivec." B řekne: „A není poctivec." Co jsou A a B?

3) Máme dva lidi, A a B, z nichž každý je poctivec, padouch nebo normální člověk. A řekne: „B je poctivec." B řekne: „A je padouch." Co jsou A a B?

KOMBINATORIKA

Základní pojmy

Permutace z n prvků

1) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer
a) 1, 2, 3, 4
b) 0, 1, 2, 3
nesmí-li se žádná cifra opakovat?

2) Na schůzi má promluvit 5 řečníků A, B, C, D, E (každý právě jednou).
a) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.
b) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A.
c) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A.

3) Určete počet všech sudých pěticiferných přirozených čísel vytvořených z cifer 1, 2, 3, 4, 5, nemůže-li se v daném čísle žádná cifra opakovat.

4) Kolika způsoby můžeme posadit ke kulatému stolu 5 mužů a 5 žen tak, aby žádné dvě osoby téhož pohlaví neseděly vedle sebe?

5) Kolika způsoby lze postavit do řady 4 Angličany, 5 Francouzů a 3 Turky, musí-li osoby téže národnosti stát vedle sebe?

Variace bez opakování

1) Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5? Kolik je mezi nimi sudých čísel?

2) Určete počet všech sudých přirozených čísel sestavených z cifer 2, 3, 4, 5, 6, v nichž se každá cifra vyskytuje nejvýše jednou.

Kombinace bez opakování

1) V rovině je dáno 6 různých bodů, z nichž žádné 3 neleží v jedné přímce. Kolik přímek tyto body určují?

2) Ze skupiny 7 chlapců a 4 dívek je třeba vybrat šestičlenné volejbalové družstvo, v němž musí být alespoň dvě dívky. Kolika způsoby to lze učinit?

3) Na taneční zábavě se sešla skupina 12 chlapců a 15 dívek. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat 4 páry pro tanec.

4) Kolika způsoby je možné z čísel $1, 2, \ldots, 100$ vybrat tři různá čísla tak, aby jedno z nich bylo aritmetickým průměrem ostatních dvou?

5) 5 dívek a 3 chlapci si chtějí zahrát volejbal. Kolika způsoby se mohou rozdělit do dvou družstev po čtyřech tak, aby v každém družstvu byl alespoň jeden chlapec?

6) Kolika způsoby je možné vybrat z přirozených čísel menších nebo rovných číslu 30 tři různá čísla tak, aby jejich součet byl roven sudému číslu?

Variace s opakováním

1) Určete počet všech přirozených pěticiferných čísel, která lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mohou-li se v sestaveném čísle cifry opakovat.

2) Uvažujme všechna celá nezáporná čísla menší než 10^6. Určete, kterých je více, těch, která ve svém zápisu neobsahují žádnou cifru 9, nebo těch, v jejichž zápise je alespoň jednou cifra 9 použita?

3) Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9?

4) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel vytvořených z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, která jsou dělitelná čtyřmi.

5) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel vytvořených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, která jsou dělitelná čtyřmi.

6) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, která jsou menší než 3 000.

Permutace s opakováním

1) Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA?

2) Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen slova PARABOLA, požadujeme-li, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky.

3) Určete počet všech anagramů, které lze získat z písmen slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna tři písmena O vedle sebe.

4) Určete počet všech přirozených čísel větších než a) $7 \cdot 10^5$, b) $4 \cdot 10^5$, která lze sestavit z cifer 2, 4, 7, má-li se cifra 2 v každém z nich vyskytovat dvakrát, cifra 4 jedenkrát a cifra 7 třikrát.

5) Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen slova INGREDIENT. Kolik z nich začíná i končí samohláskou?

6) Uchazeč o přijetí na vysokou školu musí úspěšně složit všechny čtyři zkoušky. Za každou úspěšně vykonanou zkoušku získá 2, 3 nebo 4 body. Pro přijetí musí dosáhnout alespoň 13 bodů. Kolika způsoby může složit zkoušky, aby byl přijat?

Kombinace s opakováním

1) V papírnictví mají 12 různých pohledů. Kolika způsoby můžeme nakoupit 8 pohlednic, které hodláme odeslat na různé adresy, proto může být některý druh pohlednic zakoupen ve více exemplářích?

2) Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 stejných míčků.
a) Určete počet všech možných rozdělení.
b) Určete počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane alespoň jeden míček.

3) Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek, aniž by je krájely?

4) V lahůdkářství mají kávu pěti různých druhů. Kolika způsoby je možné provést nákup 12 balíčků kávy? Kolika způsoby je to možné, požadujeme-li, aby v nákupu bylo alespoň po dvou balíčcích každého druhu kávy?

5) Kolika způsoby lze do 9 různých přihrádek rozmístit 7 bílých a 2 černé koule
a) nesmí-li žádná přihrádka zůstat prázdná,
b) mohou-li některé přihrádky zůstat prázdné.

6) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

a) v množině celých nezáporných čísel, b) v množině přirozených čísel.

7) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

a) v množině celých nezáporných čísel, b) v množině přirozených čísel.

8) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < n$$

a) v množině celých nezáporných čísel, b) v množině přirozených čísel.

Další úlohy

1) V kupé je 10 míst a 9 pasažérů. Tři z nich chtějí sedět ve směru jízdy, ostatním šesti, mezi něž patří i Venoušek s maminkou, je to jedno - až na to, že Venoušek chce sedět u okna a vedle maminky. Kolika způsoby se mohou cestující usadit, aby všichni byli spokojeni?

2) Jak se změní výsledek předchozí úlohy, předpokládáme-li, že v kupé je
a) o jednu osobu bez nároků více (je tam tedy 10 cestujících),
b) o dvě osoby bez nároků méně (je tam tedy 7 cestujících)?

3) Určete počet všech pořadí m jedniček a n nul, v nichž žádné dvě jedničky nestojí vedle sebe.

4) V kolika anagramech vytvořených z písmen slova LOKOMOTIVA nestojí žádná dvě písmena O vedle sebe? Kolik z těchto anagramů bude mít souhlásky v abecedním pořádku?

5) Ke kulatému stolu, u nějž je $m + n$ židlí, máme rozesadit m mužů a n žen tak, aby žádní dva muži neseděli vedle sebe. Kolika způsoby to lze učinit?

6) Kolika způsoby lze z karetní hry (po osmi kartách čtyř barev) vybrat šest karet tak, aby mezi nimi byly karty čtyř barev?

7) Je dáno rčení OKO ZA OKO, ZUB ZA ZUB.
a) Kolika způsoby z něj můžeme vybrat několik písmen, nezáleží-li na jejich pořadí?
b) Kolika způsoby z něj můžeme vybrat tři písmena, nezáleží-li na jejich pořadí?
c) Kolika způsoby z něj můžeme vybrat tři písmena, pokud na jejich pořadí záleží?

8)Kolika způsoby lze rozestavět písmena slova KOLENA tak, aby v každém anagramu následovaly samohlásky v abecedním pořádku?

9) Stavíme do řady 6 Angličanů, 7 Francouzů a 10 Turků tak, aby každý Angličan stál mezi Turkem a Francouzem a dále nikde nestáli vedle sebe Francouz a Turek. Kolika způsoby to můžeme udělat?

10) Řešte stejný úkol pro případ pěti Angličanů, sedmi Francouzů a deseti Turků.

11) Kolika způsoby lze rozestavět písmena v kouzelné formuli ABRAKA DABRA tak, aby žádná dvě písmena A nestála vedle sebe?

12) Kolik anagramů lze získat z písmen slova TERAKOTA tak, aby
a) se pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky,
b) žádné dvě samohlásky nestály vedle sebe?

13) Krotitel šelem chce přivést do manéže cirkusu zástup pěti lvů a čtyř tygrů, přičemž nesmějí jít žádní dva tygři bezprostředně za sebou. Kolika způsoby může šelmy seřadit?

14) Na poličce stojí 14 knih. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat šest knih, z nichž žádné dvě nestojí vedle sebe?

15) Kolika způsoby lze vybrat z karetní hry (po osmi kartách čtyř barev) 8 karet tak, aby
a) mezi nimi nebylo žádné eso,
b) mezi vybranými kartami bylo pikové eso,
c) mezi vybranými kartami bylo alespoň jedno eso,
d) mezi vybranými kartami byla alespoň dvě esa,
e) bylo vybráno po dvou kartách od každé barvy,
f) vybrané karty byly všech čtyř barev,
g) byly vybrány karty právě tří různých barev,
h) byly vybrány karty alespoň tří různých barev.

16) Kolika způsoby je možné rozdělit 8 chlapců a 4 dívky na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu bylo alespoň jedno děvče?

17) Kolika způsoby lze vybrat 4 písmena ze slova BARBAR,
a) nepřihlížíme-li k jejich pořadí,
b) bereme-li v úvahu i jejich pořadí?

18) Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova ABECEDA tak, aby v každém anagramu souhlásky následovaly v abecedním pořádku?

19) Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova BATOLE tak, aby v každém anagramu jak souhlásky tak samohlásky následovaly v abecedním pořádku?

20) Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova STUDNA tak, aby v každém anagramu mezi dvěma samohláskami stály dvě souhlásky?

Úlohy o ciferných zápisech

1)Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, která jsou sestavena ze tří sudých a tří lichých cifer.

2) Určete, kolik různých deseticiferných přirozených čísel lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3 za předpokladu, že cifra 3 bude užita v každém čísle právě dvakrát. Kolik z těchto čísel je dělitelných devíti?

3) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 123 124?

4) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, která mají ciferný součet 4.

5) Určete součet všech čtyřciferných přirozených čísel, která jsou vytvořena z cifer 1, 2, 3, 4. Rozlište dva případy:
a) všechny cifry každého čísla jsou různé,
b) cifry se v libovolném z uvažovaných čísel mohou opakovat.

6) Určete součet všech pěticiferných přirozených čísel sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, jestliže se v žádném čísle žádná cifra neopakuje.

7) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, k jejichž zápisu je užito právě dvou různých cifer.

8) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, která obsahují právě tři sudé cifry.

9) Určete počet všech $2n$-ciferných přirozených čísel složených z n sudých a n lichých cifer.

10) Kolik lichých přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 3 694, lze-li každé cifry užít nejvýše jednou?

11) Kolik existuje šesticiferných přirozených čísel, která mají sudý ciferný součet?

12) Kolik existuje šesticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je dělitelný deseti?

13) Uvažujme všechna osmiciferná přirozená čísla zapsaná pomocí cifer 1, 2, 3, 4, v jejichž zápise je každá z cifer 3 a 4 užita právě dvakrát.
a) Kolik je všech těchto čísel?
b) Kolik z nich je dělitelných čtyřmi?
c) Kolik z nich je dělitelných třemi?

14) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 123 123?

15) Kolik pěticiferných přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 12 334 444?

16) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 3 332 210?

17) Kolik pěticiferných přirozených čísel lze sestavit z cifer čísla 11 223 334, požadujeme-li navíc, aby tři cifry 3 nenásledovaly bezprostředně za sebou?

18) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel s ciferným součtem 5.

19) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, která jsou dělitelná devíti, mohou-li se v těchto číslech cifry opakovat.

20) Určete součet všech trojciferných přirozených čísel, která jsou vytvořena z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, kde:
a) všechny cifry každého čísla jsou různé,
b) cifry se v libovolném z uvažovaných čísel mohou opakovat.

21) Určete součet všech čtyřciferných přirozených čísel, která získáme všemi možnými záměnami pořadí cifer čísel:
a) 1 225, b) 1 333, c) 1 144.

22) Určete součet všech čtyřciferných přirozených čísel, která jsou vytvořena z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5 v těchto dvou případech:
a) všechny cifry každého čísla jsou různé,
b) cifry se v libovolném z uvažovaných čísel mohou opakovat.

23) Určete součet všech sudých čtyřciferných přirozených čísel sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, mohou-li se v těchto číslech cifry opakovat.

24) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel sestavených z právě dvou různých cifer.

25) Určete počet všech sudých čtyřciferných přirozených čísel sestavených z právě dvou různých cifer.

Rozdělování do přihrádek

1) Mezi tři nejlepší řešitele matematické olympiády je třeba rozdělit knižní odměny - 6 různých knih. Kolika způsoby je to možné udělat, má-li vítěz obdržet 3 knihy, druhý v pořadí 2 knihy a třetí jednu knihu?

2) Turnaje v judu se účastní 16 soupeřů.
a) Kolika způsoby z nich lze vylosovat dvojice soupeřů pro první kolo turnaje?
b) Určete počet všech možných výsledků prvního kola turnaje.

3) Určete počet rozdělení pěti fotografií do obálek, kdy ve dvou obálkách má být po dvou fotografiích a v jedné obálce jedna fotografie.

4) Společnost deseti manželských párů se chystá na projížďku na loďkách, a proto se rozdělují na 5 skupin po čtyřech osobách.
a) Kolika způsoby se mohou rozdělit tak, aby na každé loďce byli dva muži a dvě ženy?
b) V kolika z těchto případů bude jistý pan X na loďce se svou ženou?
c) V kolika z těchto případů budou jistí dva pánové X, Y na loďce se svými ženami?

5) Kolika způsoby lze rozdat 52 karet (po 13 kartách čtyř různých barev) čtyřem hráčům tak, aby každý dostal po třech kartách tří různých barev a 4 karty čtvrté barvy?

6) Kolika způsoby lze sestavit z 24 různých písmen 6 čtyřpísmenkových „slov“, užijeme-li každé písmeno právě jednou?

7) Při karetní hře preferans dostává každý ze tří hráčů po 10 kartách ze 32 karet a dvě karty zůstávají. Určete počet všech možností pro rozdání karet.

8) Hrají-li 3 hráči karetní hru mariáš, rozdává se 32 karet tak, že první hráč dostane 12 karet, ostatní dva po 10 kartách. Před začátkem hry první hráč 2 karty odkládá, takže hru začínají všichni s 10 kartami.
a) Kolika způsoby je možné rozdat karty?
b) Kolik je všech možností pro rozdělení karet před začátkem hry?

9) Kolika způsoby lze rozdělit 30 lidí na 3 stejně početné skupiny? Kolika způsoby je možné je rozdělit na 10 tříčlenných skupin?

10) kolika způsoby lze rozdělit $3n$ různých knih mezi 3 osoby tak, aby všechny osoby dostaly týž počet knih?

11) Je dáno $\frac{n(n+1)}{2}$ různých předmětů, které rozdělujeme do n skupin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tak, že ve skupině S_i je právě i předmětů, $i = 1, 2, \ldots, n$, pořadí předmětů ve skupinách není podstatné. Určete počet všech možných rozdělení,
a) je-li pořadí skupin podstatné,
b) pokud na pořadí skupin nezáleží.

12) Určete počet všech rozdělení n různých knih do k balíčků, jestliže pořadí balíčků není podstatné a platí-li

a) $n = 10,\ k = 5$, v každém balíčku jsou 2 knihy,

b) $n = 9,\ k = 3$, v každém balíčku jsou 3 knihy,

c) $n = 9,\ k = 5$, ve 4 balíčcích je po 2 knihách a v jednom je jedna kniha.